Metódy voľnej optimalizácie: Domáca úloha 2

Dátum odovzdania: 22.5.2020

Toto zadanie priamo nadväzuje na zadanie prvej domácej úlohy. Dáta úlohy generujte z rovnomerného rozdelenia tak, aby zložky vektora b boli z intervalu $[0, 1]$ a zložky matice A z intervalu $[-1, 1]$.

2.1 Gradient a Hessova matica. (2 body)

V úlohe 1.1 ste vypočítali gradient a Hessovu maticu danej účelovej funkcie f. Vytvorte v Matlabe funkcie $gradient(A, b, x, n)$ a $Hessova\_matica(A, b, x, n)$, ktorých výstupom bude gradient resp. Hessova matica danej funkcie v bode x. Tieto funkcie využijete v nasledujúcich úlohách.

2.2 Gradientná metóda s konštantným krokom.

a. (2 body) Vyriešte danú úlohu gradientnou metódou s konštantným krokom pre $m = 200$, $n = 20$ a za štartovací bod zvoľte $x_0 = 0_n$. Nezabudnite v rámci tejto metódy okrem spádovosti v každej iterácii kontrolovať aj to, či novovypočítaný bod patrí do definičného oboru. Pracujte s presnosťou $\varepsilon = 10^{-3}$ a maximálnym počtom povolených iterácií $k = 10000$.

b. (1 bod) Experimentujte s dĺžkou kroku c a porovnajte riešenia pre $c = 0.001$, $c = 0.0001$ a $c = 0.00001$. Výstupom by mala byť vhodne navrhnutá tabuľka s popisom.

2.3 Newtonova metóda. (2 body)

Vyriešte danú úlohu Newtonovou metódou. Môžete použiť funkciu $newton$ z cvičenia a vhodne ju upraviť.

2.4 Upravená Newtonova metóda.

Pri počítaní newtonovského smeru využijeme špeciálnu štruktúru Hessovej matice $H = D + A^T \hat{D} A$, čím sa vyhneme počítaniu inverznej Hessovej matice.

a. (2 body) Newtonovský smer p sa v štandardnej Newtonovej metóde určí zo vzťahu $Hp = -g$. Využitím špeciálnej štruktúry Hessovej matice a zavedením pomocnej premennej $y = \hat{D}Ap$ zostavte systém lineárnych rovníc s premennými $(p, y)^T$ a maticou $\begin{bmatrix} D & A^T \\ A & -\hat{D}^{-1} \end{bmatrix}$.

b. (1 bod) V úlohe 1.3 ste našli tvary diagonálnych matíc D a $\hat{D}$. Vytvorte v Matlabe funkciu $maticaD(x, n)$, ktorej výstupom bude tvar diagonálnej matice D v bode x a funkciu $maticaDhat\_inv(A, b, x, m)$, ktorej výstupom bude inverzná matica k diagonálnej matici $\hat{D}$.

c. (2 body) Upravte Newtonovu metódu tak, aby ste v každej iterácii namiesto inverznej Hessovej matice používali smer nájdený riešením systému rovníc z časti a. Na riešenie systému lineárnych rovníc využite matlabovskú funkciu `linsolve`.

2.5 Približné Newtonove metódy.

Výpočet Hessovej matice v každej iterácii je veľmi neefektívny najmä pri veľkých úlohách, preto má zmysel využívať tzv. približné Newtonove metódy.

a. (2 body) Upravte Newtonovu metódu tak, aby sa Hessova matica počítala len každých N iterácií. Experimentujte s voľbou N.

b. (2 body) V každej iterácii nahraďte Hessovu maticu len jej diagonálou (t.j. položme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} = 0$), čo výrazne zjednoduší výpočet inverznej matice.

2.6 Porovnanie metód.

a. (2 body) Porovnajte navzájom všetky tieto metódy vzhľadom na priemerný počet iterácií a priemerné trvanie jednej iterácie, prípadne aj vzhľadom na iné vhodné porovnávacie kritériá. Výsledky vhodne interpretujte pomocou tabuľky alebo grafu.

b. (3 body) Pre jednu náhodne vygenerovanú úlohu pre $n = 2$ a $m = 4$ vkreslite do grafu z úlohy 1.6 iteračné postupnosti bodov, ktoré viedli k nájdeniu minima danej funkcie každou z naprogramovaných metód.

c. (2 body) Experimentujte s rozmermi úlohy (zvoľte napr. $m = 20$ a $n = 200$) a riedkosťou matice A (t.j. generujte ju tak, aby väčšina jej prvkov boli nuly). Výsledky opäť vhodne interpretujte pomocou tabuľky či grafu.

Požiadavky:

Vypracovanie úlohy by malo zahŕňať:

- textovú časť (pdf) napísanú v LaTeXu - popis postupu riešenia jednotlivých úloh, tabuľky a grafy s popisom,
- všetky potrebné m-súbory - nevkladať do textovej časti.

Predmet mailu pomenujte **MVO_názov_skupiny** a do mailu napíšte stručný popis prínosu každého člena skupiny.